

Concurs de admitere la Facultatea de Matematică și Informatică
Proba: INFORMATICĂ

I.(40p)

1. (5p) Se consideră suma $S = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \dots$ (primul termen este 1, al doilea termen este $-1/3$ etc.).
 - (a) Care este expresia corespunzătoare celui de al k -lea termen?
 - (i) $1/(2k - 1)$;
 - (ii) $1/(2k + 1)$;
 - (iii) $(-1)^k/(2k - 1)$;
 - (iv) $(-1)^{k+1}/(2k - 1)$;
 - (v) $(-1)^{k+1}/(2k + 1)$.
 - (b) Scrieți o funcție în C/C++/Pascal care primește ca parametru un număr natural $n \geq 2$ și returnează suma primilor n termeni din S .
2. (5p) Un număr natural este considerat tip "dublu-unu" dacă reprezentarea sa în baza 2 conține exact o pereche de cifre consecutive egale cu 1 (numerele $3 = (11)_2$, $6 = (110)_2$ sunt de tip "dublu-unu", dar numerele $5 = (101)_2$ și $7 = (111)_2$ nu sunt de acest tip).
 - (a) Câte numere de tip "dublu-unu" sunt în intervalul $(0, 2^d)$?
 - (b) Care dintre următoarele afirmații este adevărată pentru orice număr n de tip "dublu-unu" din $(0, 2^d)$:
 - (i) există $1 \leq k \leq d$ astfel încât $n = 2^k - 2^{k-1}$;
 - (ii) există $1 \leq k < d$ astfel încât $n = 2^k + 2^{k-1}$;
 - (iii) există $0 < k < d$ astfel încât $n = 2^{k+1} + 2^{k-1}$;
 - (iv) există $1 \leq k < d$ astfel încât $n = 2^k + 1$;
3. (10p) Se consideră un serviciu web la care utilizatorii se conectează/deconectează și se pune problema determinării numărului maxim de utilizatori conectați simultan pornind de la o secvență de semnale de forma: 1 (s-a conectat un utilizator), 0 (s-a deconectat un utilizator). De exemplu pentru secvența 1,1,1,0,1,0,1,1,1,0,0,1,0,0,0 numărul maxim de utilizatori conectați simultan este 5. Scrieți o funcție C/C++/Pascal care primește un tablou de semnale precum și numărul acestora și returnează numărul maxim de utilizatori conectați simultan.
4. (10p) Pentru un număr natural nenul n se pune problema determinării numărului de zerouri finale (de exemplu 304500 conține două zerouri finale, 30245 conține 0 zerouri finale). (a) Scrieți o funcție C/C++/Pascal (*nerecursivă*) care primește ca parametru numărul n și returnează numărul de zerouri finale. (b) Scrieți o funcție C/C++/Pascal *recursivă* care efectuează aceeași prelucrare.
5. (10p) Se consideră că un text a fost tehnoredactat folosind o tastatură defectă care "multiplică" simbolurile tastate și se pune problema "curățirii" acestui text prin eliminarea caracterelor în exces (se presupune că textul conține doar cuvinte în care nu intervin simboluri consecutive identice). De exemplu textul "Accceessttta eesttte uuun exxeemmppllluu" trebuie transformat în "Acesta este un exemplu". Considerând că textul este stocat într-un tablou cu elemente de tip caracter scrieți:
 - (a) o funcție/procedură care construiește un nou tablou de caractere care conține textul curățat (pentru exemplul de mai sus noul tablou va avea 22 de caractere și va conține "Acesta este un exemplu");
 - (b) o funcție/procedură care transformă tabloul inițial astfel încât pe primele poziții să fie textul curat (în exemplul de mai sus noul conținut al tabloului este "Acesta este un exempluuuun exxeemmppllluu"). Nu este permisă utilizarea unui tablou adițional.

II.(25p) Se consideră un set de n orașe, numerotate de la 1 la n ($n \leq 50$), și o "hartă" a conexiunilor aeriene dintre aceste orașe stocată sub forma unei matrici A cu n linii și n coloane în care elementul a_{ij} este 1 dacă există conexiune directă între orașele i și j și este 0 dacă nu există conexiune directă (se presupune că $a_{ii} = 0$ și $a_{ij} = a_{ji}$ pentru orice i și j din $\{1, 2, \dots, n\}$). Exemplu: se consideră 5 orașe și matricea de conectivitate directă:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Scrieți o funcție/procedură care construiește tabloul D care conține pentru fiecare oraș numărul de conexiuni directe ($D[i]$ conține numărul de conexiuni directe care pornesc din orașul i). Exemplu: $D = [2, 3, 2, 3, 4]$.
- Scrieți o funcție/procedură care primește ca parametru tabloul D și afișează orașele în ordinea descrescătoare a numărului de conexiuni directe. Exemplu: valorile afișate sunt 5, 2, 4, 1, 3.
- Scrieți o funcție/procedură care primește ca parametri matricea conexiunilor și indicii a două orașe (i și j) și afișează toate variantele de a ajunge din orașul i în orașul j făcând cel mult o escală. Exemplu: pentru $i = 2$, $j = 5$ se afișează: (2, 5), (2, 1, 5), (2, 4, 5).
- Scrieți o funcție/procedură care calculează matricea $B = A^2 = A \times A$.
- În ipoteza că fiecare oraș este conectat direct cu cel puțin un alt oraș care dintre următoarele afirmații, referitoare la elementele matricii B , este adevărată? (i) $b_{ii} = 0$ și $b_{ij} = b_{ji}$ pentru orice i și j din $\{1, 2, \dots, n\}$; (ii) $b_{ii} \geq 1$ pentru orice i din $\{1, 2, \dots, n\}$ și există cel puțin o pereche de (i, j) cu proprietatea că $b_{ij} \neq b_{ji}$; (iii) b_{ii} conține numărul de conexiuni directe ale orașului i . Argumentați răspunsul selectat.

III.(25p) Un lucrător preia pachete (de dimensiuni diferite) de pe o bandă și le stivuiește astfel încât să nu pună niciodată un pachet peste unul de dimensiune mai mică (dacă un pachet nu poate fi plasat pe nici una dintre stivele existente este creată o nouă stivă). De exemplu, dacă dimensiunile pachetelor, în ordinea în care sosesc pe bandă, sunt [3, 1, 2, 6, 5, 7, 4] atunci stivele constituite sunt [3, 1], [2], [6, 5, 4], [7].

- Propuneți o structură de date pentru reprezentarea stivelor și scrieți o funcție/procedură care primește ca parametri numărul de pachete și un tablou cu dimensiunile acestora și care distribuie pachetele pe stive astfel încât numărul de stive create să fie cât mai mic (fiecare pachet este plasat pe prima stivă pe care este posibil).
- Presupunând că numărul de stive create este k justificați faptul că cel mai lung subșir strict crescător din tabloul dimensiunilor are k elemente (elementele din subșir nu sunt neapărat consecutive dar trebuie să fie în aceeași ordine ca în șirul inițial; de exemplu [1, 2, 6, 7] este un subșir strict crescător al șirului [3, 1, 2, 6, 5, 7, 4]). Scrieți o funcție/procedură care construiește un subșir strict crescător de lungime maximă.

Notă:

1. Timp de lucru: 3 ore
2. Toate subiectele sunt obligatorii
3. Limbajul de programare este la alegere între C/C++ și Pascal. Nu este permisă utilizarea funcțiilor din biblioteci (cu excepția funcțiilor/procedurilor de afișare).
4. Pentru fiecare dintre funcțiile/procedurile scrise se vor specifica toate declarațiile de variabile globale și locale necesare și se vor pune comentarii explicative. NU este necesară scrierea programului principal și preluarea datelor prin citire.

Barem de corectare - INFORMATICĂ

Start	10p
--------------------	------------

I.1	5p
------------------	-----------

I.1a:	2p
(Răspuns corect: (iv))	
I.1b:	3p
(declararea corectă a funcției, a variabilelor locale și returnarea rezultatului - 1p; descrierea corectă a calculului sumei - 2p)	

I.2	5p
------------------	-----------

I.2a:	3p
Răspuns corect: $d - 1$	
I.2b:	2p
Răspuns corect: (ii)	

I.3	10p
(declararea corectă a funcției, variabilelor de lucru și returnarea rezultatului - 1p; parcurgerea corectă a tabloului cu semnale - 2p; actualizarea corectă a numărului de utilizatori activi - 3p; determinarea valorii maxime - 4p)	

I.4	10p
------------------	------------

I.4a:	5p
(declararea corectă a funcției, a variabilelor de lucru și returnarea rezultatului - 1p; calculul corect al numărului de zerouri finale - 4p;)	
I.4b:	5p
(declararea corectă a funcției, a variabilelor de lucru și returnarea rezultatului - 1p; condiție corectă pentru ieșirea din apelul recursiv - 1p; apel recursiv corect - 1p; calculul corect al numărului de zerouri finale - 2p)	

I.5	10p
------------------	------------

5a:	5p
(declararea funcției/procedurii și a variabilelor utilizate - 1p; construirea corectă a noului tablou - 4p)	
5b:	5p
(declararea funcției/procedurii și a variabilelor utilizate - 1p; transformarea corectă a tabloului - 4p)	

II 25p

- II.a: 5p
(declararea corectă a funcției/procedurii și a variabilelor utilizate - 1p; calculul sumei elementelor de pe fiecare linie (sau determinarea numărului de valori egale cu 1 de pe fiecare linie) și stocarea corectă în tabloul D - 4p.)
- II.b: 8p
(declararea corectă a funcției/procedurii și a variabilelor utilizate - 1p; implementarea corectă a unei metode de sortare - 5p; asigurarea concordanței dintre elementele tabloului D și numerele de ordine ale orașelor - 1p; afișarea numerelor de ordine ale orașelor în ordinea cerută - 1p)
- II.c: 5p
(declararea corectă a funcției/procedurii și a variabilelor utilizate - 1p; afișarea traseului direct (dacă există) - 1p; afișarea tuturor traseelor cu o escală - 3p)
- II.d: 5p
(declararea corectă a funcției/procedurii și a variabilelor utilizate - 1p; calculul corect al produsului - 4p)
- II.e: 2p
(răspuns corect: (iii) - 1p; argumentare: $b_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot a_{ki}$ reprezintă numărul de orașelor k conectate direct cu orașul i ($a_{ik} = 1$) - 1p)
-

III 25p

- III.a: 15p
(definirea unei structuri de date adecvate - 5p; declararea corectă a funcției/procedurii și a variabilelor utilizate - 1p; parcurgerea tabloului cu dimensiuni și completarea structurii - 9p)
- III.b: 10p
(justificarea faptului că un subsir strict crescător nu poate avea mai mult de un element în aceeași stivă - 2p; declararea corectă a funcției/procedurii și a variabilelor utilizate - 1p; construirea unui subsir strict crescător - 7p)
-

TOTAL: 100

Observație: Se punctează corespunzător orice variantă corectă de rezolvare.